

Д.Н. Нургабыл¹, Б.Б. Саткулов^{2*}, Ф.О. Мехмет³

^{1,2}Жетысуский университет имени Н. Жансугурова, Талдыкорган, Казахстан

³Ağrı İbrahim Çeçen University, Merkez, Ağrı, Turkey

(*Корреспондирующий автор. E-mail: bbs.mamyr@gmail.com)

¹ORCID 0000-0002-8111-862X,

²ORCID 0009-0007-1191-5053,

³ORCID 0000-0003-0428-6176

Педагогическое измерение математической грамотности в контексте критериального оценивания достижений учащихся

Анализ результатов исследований отечественных и зарубежных авторов позволил заключить, что внимание исследователей в основном обращено на статистические данные международных исследований PISA, а вопросы установления сформированности у школьников математической грамотности в процессе обучения школьного курса математики до сих пор остаются малоисследованными, что обусловило выбор цели и задач исследования. Цель и задачи данного исследования заключаются в разработке методики измерения сформированности математической грамотности в контексте критериального оценивания достижений учащихся, которые согласуются с основополагающими вопросами программной концепции Организации экономического сотрудничества и развития (OECD) и исследованиями PISA. В работе обосновано, что обучение школьников математической грамотности, измерение сформированности математической грамотности осуществляется посредством решения практико-ориентированных задач. В работе установлено, что в процессе решения проблемных задач школьниками поэтапно совершаются следующие мыслительные операции: суждение, понимание проблемной ситуации, составление математической модели, применение знаний, интерпретация решения, исследование, оценка. Выделена последовательность мыслительных операций, совершаемых в процессе решения проблемно-ориентированных задач. Определены и дополнены компоненты математической грамотности. Установлена уровневая шкала измерения математического рассуждения школьников по каждому компоненту математической грамотности. Предложена формула для измерения математической грамотности школьника по блоку задач, интегрирующих коэффициенты сформированности математической грамотности по отдельным задачам. Построена модель процесса формирования и развития математической грамотности. Разработана методика измерения сформированности математической грамотности в контексте критериального оценивания учебных достижений учащихся.

Ключевые слова: математическая грамотность, мыслительные операции, оценочные задания, обучающие задания, математическое рассуждение, навыки 21 века, педагогическое измерение, критериальное оценивание.

Введение

В последние годы многие национальные образовательные системы, с целью повышения уровня математической грамотности школьников в контексте исследований PISA [1], в свои образовательные программы включили вопросы обучения математической грамотности. В связи с этим у них повысился исследовательский интерес к вопросам разработки методов обучения математической грамотности.

Например, P.C. García, на основе анализа результатов международных экзаменов PISA, отмечает, что для формирования и развития математической компетенции у школьников Испании не хватает образовательных ресурсов, которые эффективно формировали бы у них математическую грамотность [2]. S.A. Sorby, G.C. Panther замечают, что успешность выполнения школьниками тестовых заданий PISA непосредственно зависит от сформированности у школьников навыков мышления [3]. При этом они подчеркивают, что развитие мышления способствует развитию математической грамотности, что в конечном итоге способствует качественной подготовке школьников к реальной взрослой жизни. В статье [4] R. Lavi исследованы проблемы выбора методов обучения с позиции формируемых мыслительных навыков 21-го века.

В программной концепции PISA-2021 особое внимание уделяется пояснению определения понятия «Математическая грамотность» на основе математического рассуждения. Математическая грамотность — это знание, мыслительный навык человека, которые позволяют ему осознать роль мате-

матики в окружающем мире, проводить математические рассуждения и эффективно применять математику в практических задачах [5; 8].

Такой интерес к математическому рассуждению, развитию мыслительных навыков вызван тем, что сформированные мыслительные навыки способствуют успешному развитию у школьников математической грамотности. Например, B.S. Haug и S.M. Mork изучают мнение учителей математики о полезности установления сформированности у школьников мыслительных навыков для измерения сформированности у них математической грамотности и в профессиональном развитии самих учителей [6].

В педагогической дидактике известно, что установление уровня сформированности у школьников знаний, умений и навыков способствует решению проблем развития у них новых знаний, умений и навыков. Однако M. Saarela и T. Karkkainen в работе [7], приводя сравнительный анализ результатов исследований PISA, подчеркивают, что, несмотря на доступность результатов экзаменов PISA, научные исследования, направленные на выработку методологических основ измерения сформированности у школьников математической грамотности с использованием этих качественных, системно представленных данных, почти отсутствуют.

Таким образом, анализ показал, что статистические данные PISA больше привлекают внимание исследователей, а вопросы разработки методов оценки сформированности математической грамотности у школьников в течение определенного учебного периода, выявления методических основ способов составления оценочных заданий к учебным практико-ориентированным задачам в контексте исследований PISA до сих пор остаются малоизученными.

Следовательно, педагогическое измерение сформированности математических и междисциплинарных знаний, уровни сформированности мыслительных навыков в контексте критериального оценивания учебных достижений у школьников являются актуальными в процессе формирования и развития математической грамотности у учащихся РК, что предопределило цель и задачи исследования.

Цель и задачи исследования заключаются в разработке подхода к составлению методики измерения сформированности математической грамотности в контексте критериального оценивания достижений учащихся

В статье в качестве обще методической основы для разработки методики измерения математической грамотности школьников выбраны технология оценивания критериальной системы оценки учебных достижений учащихся Республики Казахстан и оценочная технология экзаменов PISA.

Методы и материалы исследования

Для достижения поставленной цели на начальном этапе было проведено констатирующее экспериментально-педагогическое исследование: сравнительный анализ, опрос-анкетирование, контрольная работа, математическая обработка полученных данных, обобщение.

Для выработки теоретико-методологических основ педагогического измерения математической грамотности нами был изучен опыт практической работы учителей, проведен анализ исследований отечественных и зарубежных авторов, касающихся методики определения сформированности у учащихся математической грамотности, а также изучена учебно-методическая нормативная база, касающаяся вопросов оценки учебных достижений учащихся в Республике Казахстан.

Исследование показало, что в учебно-нормативных базах, в исследованиях отечественных и зарубежных авторов нет нормативной информации и результатов исследований, касающихся вопросов измерения сформированности математической грамотности у 15-летних учащихся

Опрос учителей и анализ учебников в контексте исследований PISA показали, что в учебниках, используемых в школах Республики Казахстан, в основном приводится контекст задач, к которым почти не предлагаются вопросы и задания, позволяющие раскрыть суть задачи с различных позиций, а также отсутствуют введения к этим задачам, способствующие визуализации постановки задачи.

Анализ показал, что в некоторых практических задачах, в которых предлагаются вопросы и задания, в основном требуются громоздкие вычисления. Другие учебные задачи школьной математики предназначены только для усвоения, закрепления новых знаний, освоения нового метода решения стандартной задачи, которые не рассчитаны для формирования и развития у учащихся математической грамотности и проведения педагогического измерения математической грамотности у школьников. Трудность составления оценочных заданий и вопросов объясняется тем, что оценочные задания составляются на основе математических рассуждений, совершаемых в процессе решения задачи.

Следовательно, успешность измерения сформированности математической грамотности зависит от установления сформированности математических рассуждений.

В связи с этим, далее 43-м учителям старших классов были предложены две практико-ориентированные задачи из учебников алгебры, задания для выполнения:

- 1) решите данные задачи;
- 2) сформулируйте задания к исходным задачам в контексте тестовых экзаменов PISA;
- 3) определите, какие мыслительные операции совершаются учащимся при решении данных заданий.

Заметим, что задания 2) и 3) идентичны для всех типов практико-ориентированных задач, которые направлены на установление навыков составления оценочных заданий в контексте исследований PISA.

Анализ результатов выполнения учителями этих заданий показал, что они в большинстве справились с 1) заданием (81 %), т.е. у большинства учителей *сформированы математические знания на достаточно высоком уровне*. Однако почти все учителя не справились с заданиями 2) и 3) (91 %). Они не смогли сформулировать задания к исходным задачам, определить, какие мыслительные операции совершаются учащимся в процессе решения этих заданий в контексте международных исследований PISA. Для выполнения второго и третьего задания от учителей требовалось *только использование и знание подробного алгоритма решения задачи*. Заметим, что эти алгоритмы проявляются в процессе выполнения первого задания, которые были реализованы учителями при выполнении задания 1).

Таким образом, обобщая опыты работы учителей и анализируя результаты экспериментального исследования, можно заключить, что разработка подхода к составлению методики измерения математической грамотности школьников остается малоисследованной. Как известно, использование установленного уровня сформированности математической грамотности в коррекции учебного процесса, согласно педагогической дидактике, способствует решению проблем дальнейшего развития у учащихся математической грамотности.

Результаты исследования и обсуждение

В программной концепции PISA-2021 оценка математической грамотности 15-летних школьников основана на определении уровня их способностей: формулировать математическую задачу для данной практико-ориентированной задачи, применять знания и методы для решения математической задачи, интерпретировать найденное решение задачи в контексте проблемной задачи.

Согласно требованиям критериальной оценки знаний учащихся, результаты проверки учебных достижений, мыслительных навыков учащихся выражаются в условных баллах, а также в оценочных суждениях учителя.

В связи с этим в качестве общеметодической основы для разработки подхода к составлению методики измерения математической грамотности у школьников нами выбрана технология оценки критериальной системы оценки учебных достижений учащихся Республики Казахстан и оценочная технология экзаменов PISA. Однако критериальная система оценки учебных достижений учащихся часто оказывается недостаточно чувствительной в определении уровня сформированности математической грамотности у школьников. Поэтому разработка методики измерения сформированности у школьников математической грамотности в контексте критериального оценивания учебных достижений учащихся является особенно важным вопросом в процессе обучения школьников математической грамотности.

С целью проектирования данного подхода более подробно рассмотрим алгоритм решения практико-ориентированных задач в контексте совершения школьниками мыслительных операций: суждение, понимание проблемной ситуации, формулирование-составление математической модели, суждение, понимание, применение знаний для нахождения решения этой модели, решение задачи, суждение, понимание, интерпретирование полученного решения, исследование, обобщение, оценка.

Тем самым, мы придем к следующей модели процесса формирования и развития математической грамотности (рис.).

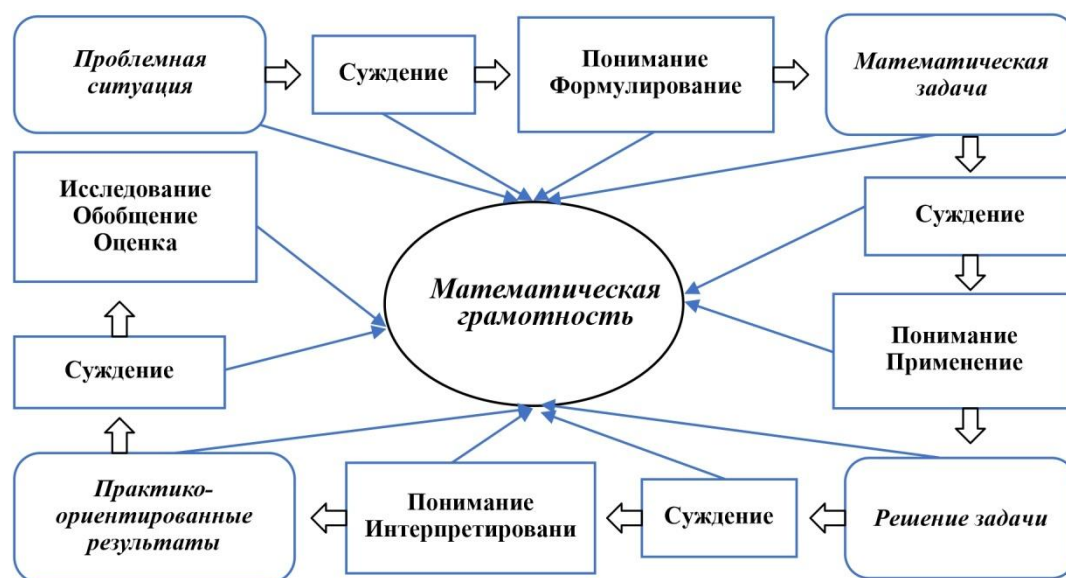


Рисунок. Модель процесса формирования и развития математической грамотности

В указанной модели ключевым составляющим математической грамотности является математическое рассуждение, которое включает в себя суждение и умозаключение. При этом на каждом этапе устанавливается взаимосвязь между математическим рассуждением и четырьмя объектами изучения (проблемная ситуация, математическая задача, решение задачи, практические результаты).

Математическое рассуждение является инструментом понимания контекста задачи и заданий, установления связи между различными понятиями, вывода умозаключений: формулирования математической задачи, применения знаний к решению математической задачи, интерпретации решения задачи в контексте реального явления, оценивания искомого решения.

Кроме того, математическое рассуждение имеет более широкое мыслительное поле деятельности, выходящее за рамки процесса решения этой задачи. А именно, математическое рассуждение является средством познания, аргументации, обоснования, обобщения, связанных с выводами, утверждениями и формулированием алгоритма решения различных проблем, возникающих в повседневной деятельности человека.

Таким образом, изучение характера усвоения учащимися учебного материала, оценка их знаний, выявления уровня умственного развития и познавательных способностей — необходимая составляющая процесса обучения математической грамотности. Проверка сформированности у школьников математической грамотности является очень сложным и важным процессом, как в теоретическом аспекте, так и в методическом плане его практических разработок.

Под сформированностью у школьников математической грамотности будем понимать их способность осуществлять математические рассуждения в процессе решения практико-ориентированных задач. При этом уровень сформированности школьников математической грамотности при выполнении заданий определяется трудностью контекста задачи, описывающей проблемную ситуацию, сложностью составления математической модели данной задачи, трудоемкостью применяемых методов решения математической задачи, сложностью интерпретации, аргументации и оценки найденного решения. Следовательно, уровень сформированности у школьников математической грамотности непосредственно зависит от трудности задачи, сложности математических рассуждений и умозаключений, необходимых для решения школьниками поставленной задачи.

В теории тестирования реальная трудность задачи и её значимость определяются количеством (процентом) школьников, правильно решивших эту задачу [8; 5]. В данном исследовании реальную трудность задачи определим посредством математических рассуждений, используемых школьниками в процессе решения данной задачи. Очевидно, что уровень сложности математических рассуждений, применяемых школьниками на различных этапах решения задачи, неравнозначен в измерении математической грамотности школьника.

В связи со сказанным, а также исходя из понимания важности выделенных этапов решения задачи в процессе формирования и развития математической грамотности, определим соответствующие

одноименные компоненты измерения математической грамотности учащихся: суждение, умозаключение, формулирование, применение, интерпретация и оценка.

Для установления значимости компонентов математической грамотности была создана специальная экспертная комиссия. Экспертной комиссии, состоящей из 7-и учителей математики, было предложено определить значимость каждого компонента математического рассуждения с помощью числовых характеристик (от 1 до 3 баллов).

На основе числовых характеристик, предложенных членами экспертной комиссии, была составлена сопоставительная матрица порядка 7x5 (табл. 1):

Т а б л и ц а 1

Сопоставительная числовая матрица значимости компонентов математической грамотности

Математическое рассуждение	Эксперты						
	1	2	3	4	5	6	7
Суждение	1	1	2	2	1	1	1
Умозаключение	2	2	3	3	2	2	2
Формулирование	2	3	3	3	3	3	2
Применение	3	3	3	3	3	3	3
Интерпретация и оценка	3	2	3	2	3	3	3

Теперь, используя сопоставительную матрицу, представленную в виде таблицы 1, определим важность каждого компонента измерения математического рассуждения, как среднее геометрическое элементов каждой строки в отдельности по формуле:

$$\lambda_j = \sqrt[7]{\prod_{i=1}^7 a_{ij}}, \quad j = 1, \dots, 4 \quad (1)$$

Применяя формулу (1), получаем:

$$\lambda_1 = 1,2; \lambda_2 = 2,2; \lambda_3 = 2,7; \lambda_4 = 3; \lambda_5 = 2,7. \quad (2)$$

Округляя найденные коэффициенты важности компонентов оценки математического рассуждения, составим уровневую шкалу измерения математического рассуждения школьников по каждому компоненту (табл. 2).

Т а б л и ц а 2

Шкала измерения математической грамотности школьника при формативном оценивании

№ п.п	Математическое рассуждение	Ученик	Баллы (max)
1	Суждение	Знает, понимает и воспроизводит понятия, основные свойства, формулы. Умеет выявлять переменные, выделять разъяснительную часть, условие и утверждение задачи.	1
2	Умозаключение	Умеет устанавливать зависимость между переменными. Умеет с помощью суждений, высказываний, аналогий, дедукции выводить заключение.	2
3	Формулирование	Умеет математически моделировать проблемную ситуацию посредством переменных, графиков, таблиц, диаграмм.	3

№ п.п	Математическое рассуждение	Ученик	Баллы (max)
4	Применение	Умеет применять математические правила, понятия, свойства, алгоритмы в решении практических задач. Умеет преобразовывать алгебраические выражения и уравнения, оперировать числовыми выражениями и статическими данными. Обладает навыками письменного обоснования производимой каждой операции в решении задачи.	3
5	Интерпретирование, оценивание	Умеет интерпретировать решения практических задач, представленные в виде формулы, функции, графика, таблицы и других объектов. Умеет проводить математическое рассуждение для оценки математических решений в контексте проблемной ситуации. Умеет оценивать полученные результаты в контексте проблемной ситуации. Умеет выделять, обобщать особенности задачи при исследовании решений.	3

Таким образом, рассуждения, используемые на каждом этапе, являются ключевыми компонентами в измерении математической грамотности учащихся. Однако многие проблемные ситуации, рассматриваемые в исследованиях PISA, включают только некоторые этапы решения задачи или же один этап может охватывать несколько последовательных этапов решения задачи. Например, в некоторых задачах задаются лишь готовые геометрические представления или уравнения, и соответствующие задания к этим объектам.

В исследованиях PISA 15-летним школьникам предлагаются мониторинговые задачи, близкие к реальным практическим проблемным ситуациям. Содержание проблемной ситуации конструируется из нескольких взаимосвязанных между собой заданий. Каждое задание направлено на оценку определенных предметных знаний и личностных результатов.

Выбор направленности педагогического эксперимента на формирование, развитие и оценку математической грамотности учащихся, соответствующий программной концепции PISA-2021, создал предпосылки для нового понимания и изменения содержания и формы критериальной оценки учебных успехов учащихся. В связи с этим изложим новый подход к составлению методики измерения математической грамотности учащихся в контексте критериальной оценки учебных достижений учащихся.

При критериальной оценке учебных достижений учащихся основными видами проверки знаний, умений и навыков учащихся по математике являются формативные (текущие) оценки, суммативные оценки по разделу (тематические), за четверть, полугодие, год (итоговая). Формативная оценка проводится в течение всего обучения, на каждом уроке. При формативном оценивании проверяются умения учащихся выполнять математические операции, навыки применения новых знаний, приобретенных на уроке. И поэтому, измерение сформированности математической грамотности первого уровня можно проводить в рамках формативной оценки. При суммативной оценке по разделу выясняется уровень усвоения учащимися основных положений темы. Здесь особое внимание уделяется выявлению навыков учащихся в формулировании математических объектов, умений применять знания при решении практических задач, интерпретировать решения задач.

Для измерения сформированности математической грамотности предлагаем блок, состоящий из трех практических задач легкого, среднего и высокого уровней сложности из разных областей математического содержания. Каждая задача, в зависимости от математического рассуждения, совершаемого в процессе решения задачи, может состоять из 1–3-х заданий.

Теперь приведем модельные примеры, где иллюстрируется общая структура задач и заданий, посредством которых осуществляется оценка сформированности у школьников математической грамотности по разделу «Квадратные уравнения» (8 класс).

Пример 1. «Квадрокоптер» (Легкий уровень сложности). Квадрокоптер, пролетев 16 км против направления ветра, развернулся и пролетел 20 км по направлению ветра, затратив на весь путь 1 час. Найдите собственную скорость квадрокоптера, если скорость ветра равна 4 км/час.

Задание 1.1. Найдите математическое выражение, описывающее время, затраченное на 16 км пути против направления ветра, и 20 км пути по направлению ветра, если скорость ветра равна 4 км/час.

Алгоритм решения задания 1.1:

1. Пусть x – собственная скорость квадрокоптера. Тогда время, затраченное на 16 км пути против направления ветра, выражается формулой $\frac{16}{x-4}$.

2. Время, затраченное на 20 км пути по направлению ветра, выражается формулой $\frac{20}{x+4}$.

Когнитивная деятельность: суждение, умозаключение. Оценка — 4 балла.

Задание 1.2. За какое время квадрокоптер пролетит весь путь? Найдите соответствующее математическое выражение.

Алгоритм решения задания 1.2:

Составляется уравнение $\frac{16}{x-4} + \frac{20}{x+4} = 1$.

Когнитивная деятельность: суждение, умозаключение. Оценка — 2 балла.

Задание 1.3. Найдите собственную скорость квадрокоптера.

Алгоритм решения задания 1.3:

Решая уравнение $\frac{16}{x-4} + \frac{20}{x+4} = 1$, получаем собственную скорость квадрокоптера, равную 36 км/час.

Когнитивная деятельность: применение, интерпретация. Оценка — 3 балла.

Характеристика задачи (проблемной ситуации) «Квадрокоптер»:

Математическое содержание: изменение и зависимости.

Когнитивная деятельность: суждение, умозаключение, применение, интерпретация.

Максимальное количество баллов: 9.

Пример 2. «Площадь прямоугольника» (Средний уровень сложности). В прямоугольнике указаны площади соответствующих частей. Найдите неизвестную площадь.

105	?
84	96

Задание 2.1. Выразите площади прямоугольников через ширину и длину эти прямоугольников.

Алгоритм решения задания 2.1:

1. $ax = 105$.

2. $cy = 96$.

3. $ac = 84$.

Когнитивная деятельность: суждение, умозаключение. Оценка — 6 балла.

Задание 2.2. Определите площадь неизвестного прямоугольника.

Алгоритм решения задания 2.2:

Из выражений $ax = 105$ и $cy = 96$, находим $acxy = 105 \cdot 96$, $acxy = 105 \cdot 96$.

Из выражений $acxy = 105 \cdot 96$ и $ac = 84$, получаем $xy = 105 \cdot 96 : 84$.

Таким образом, искомая площадь будет равна $xy = 120$.

Когнитивная деятельность: суждение, умозаключение. Оценка — 6 баллов.

Характеристика задачи (проблемной ситуации) «Площадь прямоугольника»:

- Математическое содержание: Количество, пространство и форма;

- Когнитивная деятельность: суждение, умозаключение.

- Максимальное количество баллов: 12.

Пример 3. Задача «Аквариум» (Высокий уровень сложности).

В школе кабинет биологии оснащен учебным аквариумом, который предназначен для содержания рыбок и других морских животных, а также для наблюдения за ними. Для сохранения экосреды, аквариум, объемом 2 м^3 , постоянно заполняется водой через две разные трубочки одновременно.

Задание 3.1. Найдите математическое выражение, описывающее разницу во времени заполнения аквариума водой через данные трубочки в отдельности, если через вторую трубочку аквариум наполняется водой на 6 минут медленнее, чем через первую.

Алгоритм решения задания 2.1:

1. Пусть в отдельности первая трубочка наполняет аквариум за x мин, а второй — за y мин.

Когнитивная деятельность: суждение, которое позволяет выбрать в качестве переменных время наполнения аквариума водой через данные трубочки. Оценка — 1 балл.

2. По условию задачи через вторую трубочку аквариум наполняется на 6 минут медленнее, чем через первую.

Когнитивная деятельность: суждения и умозаключения, которые устанавливают связь между выражением « $y - x$ » и высказыванием «Через вторую трубочку аквариум наполняется на 6 минут медленнее, чем через первый». Оценка — 2 балла.

3. С учетом этого условия, получаем уравнение

$$y - x = 6, \quad (3)$$

описывающего разницу времен наполнения аквариума водой через данные трубочки.

Когнитивная деятельность: суждение, формулирование уравнения $y - x = 6$. Оценка — 3 балла

Задание 3.2. Найдите математическое выражение, описывающее разницу объемов заполнения аквариума водой через данные трубочки в отдельности, если через вторую трубочку за 1,5 часа вливается вода на 1 м^3 меньше, чем через первую.

Алгоритм решения задания 2.2:

1. За 1 минуту первая трубочка наполняет $\frac{2}{x} \text{ м}^3$, вторая наполняет $\frac{2}{y} \text{ м}^3$ объема аквариума.

Когнитивная деятельность: рассуждение, которое устанавливает связь между высказываниями «1 мин. — время наполнения аквариума водой через данные трубочки» и «Объем наполнения аквариума водой через данные трубочки за 1 минуту». Оценка — 2 балла.

2. За 90 минут первая трубочка заполняет $\frac{2 \cdot 90}{x} \text{ м}^3$, вторая заполняет $\frac{2 \cdot 90}{y} \text{ м}^3$ объема аквариума.

ма.

Когнитивная деятельность: рассуждение, которое устанавливает связь между понятиями «90 мин — время наполнения аквариума водой через данные трубочки» и «Объем наполнения аквариума водой через данные трубочки за 90 минут». Оценка — 2 балла.

3. По условию задачи через вторую трубочку за 1,5 часа вливается вода на 1 м^3 меньше, чем через первую. В связи с этим, получаем уравнение

$$\frac{2 \cdot 90}{x} - \frac{2 \cdot 90}{y} = 1. \quad (4)$$

Когнитивная деятельность: рассуждение, формулирование математического выражения, описывающего разницу объемов заполнения аквариума водой через данные трубочки в отдельности. Оценка — 3 балла.

Задание 3.3. Найдите, сколько времени нужно для наполнения аквариума водой через каждую трубочку в отдельности.

Алгоритм решения задания 2.3:

1. Решая систему уравнений (3), (4), получаем

$$x_1 = 30; x_2 = -36; y_1 = 36; y_2 = -30.$$

Когнитивная деятельность: рассуждение, применение методов нахождения решений квадратных уравнений и систем рациональных уравнений. Оценка — 3 балла.

2. Ответ: первая трубочка наполнила бы аквариум водой за 30 мин., вторая за 36 мин. Второе решение системы не годится, так как по смыслу задачи время наполнения аквариума водой должны быть положительными.

Когнитивная деятельность: рассуждение, интерпретация и оценка решения математической модели. Оценка — 3 балла.

Характеристика задачи (проблемной ситуации) «Аквариум»:

1. Математическое содержание: изменение и зависимости.

2. Когнитивная деятельность: суждение, рассуждение, умозаключение, применение, интерпретация, оценка.

3. Максимальное число баллов: 19 баллов.

Из алгоритма решения этих задач заключаем, что прямой подсчет набранных школьниками баллов не позволяет установить общий уровень сформированности у школьников математической грамотности. В связи с этим, в начале введем коэффициент сформированности математической грамотности по каждой задаче:

$$K_n^j = \frac{\sum_{i=1}^r a_i^n}{B}, j = 1, 2, 3, \quad (5)$$

где a_i^n — общее количество набранных баллов n -го школьника, B — максимальное количество баллов, K_n^j — коэффициент сформированности математической грамотности n -го школьника по j -задаче (легкого, среднего, высокого уровня сложности), которые могут принимать значения в пределах (01).

Заметим, что вышеуказанные коэффициенты сформированности по отдельным задачам не отражают общую картину сформированности математической грамотности школьника. В связи с этим возникает вопрос об измерении математической грамотности по данному блоку задач.

Для решения данного вопроса предлагаем модифицированную формулу для измерения математической грамотности школьника по блоку задач, интегрирующую коэффициенты сформированности математической грамотности по отдельным задачам [9]:

$$K = \alpha_1 K_n^1 + \alpha_2 K_n^2 + \alpha_3 K_n^3 \quad (6)$$

где α_j — веса значимости коэффициентов K_n^j , которые определяются эмпирическим методом.

Для определения числовых значений этих весов были приглашены эксперты (учителя математики, психологи), которые каждому коэффициенту сформированности математической грамотности K_n^j присвоили баллы (от 1-го до 10 баллов), характеризующий значимость K_n^j . На основе этих числовых характеристик значимости K_n^j была составлена матрица парных сравнений (табл. 3).

Т а б л и ц а 3

Матрица парных сравнений числовых характеристик значимости K_n^j

	Баллы, присвоенный экспертом 1	Баллы, присвоенный экспертом 2	Баллы, присвоенный экспертом 3	Баллы, присвоенный экспертом 4	Баллы, присвоенный экспертом 5	Баллы, присвоенный экспертом 6
K_n^1	5	5	6	5	4	5
K_n^2	7	8	7	8	6	8
K_n^3	10	10	10	10	10	10

После этого, используя сопоставительную матрицу, представленную в виде таблицы 3, вычислим среднее геометрическое элементов каждой строки по отдельности по формуле:

$$\lambda_j = \sqrt[6]{\prod_{i=1}^6 a_{ij}}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (7)$$

Применяя формулу (7), получаем:

$$\lambda_1 = 4,96; \lambda_2 = 7,29; \lambda_3 = 10. \quad (8)$$

Определим веса значимости коэффициентов K_n^j по формуле

$$\alpha_j = \frac{\lambda_j}{\sum_{i=1}^3 \lambda_i}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i = 22,25$$

. Тогда, используя это значение, с учетом (8) из (9), получаем

$$\alpha_1 = 0,22; \alpha_2 = 0,33; \alpha_3 = 0,45. \quad (10)$$

Таким образом, из (6) и (10) можно вывести формулу для измерения сформированности математической грамотности школьника в виде:

$$K = 0,22K_n^1 + 0,33K_n^2 + 0,45K_n^3, \quad (11)$$

где значение K определяет уровень сформированности математической грамотности учащегося по конкретному разделу курса математики. При этом будем считать, что:

- математическая грамотность учащегося сформирована на низком уровне, если $0 < K < 1/2$;
- математическая грамотность учащегося сформирована на среднем уровне, если $1/2 \leq K < 7/10$;
- математическая грамотность учащегося сформирована выше среднего уровня, если $\frac{7}{10} \leq K < 9/10$;

- математическая грамотность учащегося сформирована на высоком уровне, если $\frac{9}{10} \leq K \leq 1$.

Итак, все коэффициенты сформированности математической грамотности K, K_n^j направлены на педагогическое измерение сформированности у школьников новых знаний, математических рассуждений и математической грамотности.

Как известно, учебные материалы по математике предусматривают решение формирующих и развивающих задач. Для успешности формирующего и развивающего обучения учитель должен проанализировать формирующие и развивающие возможности учебных задач и, в соответствии с этим, определить цели обучения, а также выбрать оптимальный метод обучения.

В соответствии с целью обучения отбираются практико-ориентированные оценочные задачи, обеспечивающие измерение сформированности математической грамотности.

Таким образом, на формирующем этапе экспериментального исследования были определены компоненты измерения математической грамотности учащихся, составлена сопоставительная матрица значимости компонентов математической грамотности, разработана уровневая шкала измерения математической грамотности школьника при формативном оценивании, определены коэффициенты сформированности математической грамотности школьника по решаемой задаче, установлена формула для определения уровня сформированности математической грамотности учащегося по конкретному разделу курса математики.

Заключение

Для установления эффективности предлагаемого подхода к измерению математической грамотности, определения уровня сформированности понимания, умозаключения, формулирования, приме-

нения, интерпретирования и оценки была проведена оценочная письменная работа, состоящая из 3-х практико-ориентированных задач, где к каждой задаче были составлены по 2-3 оценочных задания.

Проверочную работу писали 32 школьника из экспериментального, 30 — контрольного классов.

При определении сформированности математической грамотности учитывались следующие признаки сформированности математических рассуждений:

- устанавливает зависимости между данными, понимает постановку задачи;
- умеет применять математические и междисциплинарные знания;
- умеет формулировать и составлять математические модели;
- умеет находить решение математической задачи;
- умеет интерпретировать найденное решение в контексте проблемной ситуации;
- умеет оценивать правильность и полноту решения задачи.

Для установления эффективности предлагаемого подхода к измерению математической грамотности применим t-критерий Стьюдента. Вычисляя эмпирическое значение t-критерия Стьюдента, определили, что: $t_{эм} = 2,31$. При заданном уровне значимости $\alpha = 0,05$ и числе степеней свободы $k = n_1 + n_2 - 2 = 32 + 30 - 2 = 60$ нашли, что $t_{крит} = 2,00$ и $t_{эм} > t_{крит}$.

Полученные результаты показывают, что на пороге значимости $\alpha = 0,05$ различия в распределении статических данных учащихся экспериментального и контрольного классов по уровню сформированности математической грамотности у них статически значимы. И, что школьники из экспериментального класса показывают сравнительно более высокий уровень знаний и умений строить, решать математические задачи.

Далее, определяя уровень сформированности математической грамотности каждого учащегося по формуле (11), а затем, вычисляя средневзвешенные коэффициенты сформированности математической грамотности для школьников экспериментального и контрольного классов, получаем, что

$$K_k \approx \frac{5}{12} < \frac{1}{2}; \quad K_s \approx \frac{7}{10}.$$

Отсюда следует, что математическая грамотность учащегося контрольного класса сформирована на низком уровне, тогда как у учащихся экспериментального класса сформирована выше среднего уровня.

Тем самым убеждаемся, что предложенный подход измерения математической грамотности у школьников соотносится с результатами t-критерия Стьюдента.

Следовательно, приходим к выводу о полезности предложенного подхода, разработанного на основе оценочных задач PISA, технологии критериальной системы оценивания учебных достижений учащихся, в измерении математической грамотности.

Предложенный подход может быть полезен при обучении студентов междисциплинарным знаниям, а алгоритм решения рассмотренных задач может быть использован при оценке междисциплинарных знаний, навыков XXI века, при составлении учебников по математике нового поколения.

Заметим, что трудностью действенного применения разработанного подхода в процессе обучения школьников решению практико-ориентированных задач является отсутствие времени у учителей для анализа формирующих возможностей учебных задач, конструирования оценочных заданий.

Информация о финансировании. Данное исследование поддерживается Комитетом науки МНУВО РК (грант № AP19676696)

Список литературы

- 1 (2018). OECD Future of Education and skills 2030 OECD. *oecd.org*. Retrieved from [https://www.oecd.org/education/2030/E2030 %20Position%20Paper%20 \(05.04.2018\).pdf](https://www.oecd.org/education/2030/E2030 %20Position%20Paper%20 (05.04.2018).pdf).
- 2 Garcia, P., Cenjor, M., & Cenjor, P. (2015). Group games in Mathematics Learning: A Resource for Everyone. *INTED 2015: 9th International Technology, Education and Development Conference*, 4918–4923. Retrieved from <https://publons.com/wos-op/publon/19980218/>.
- 3 Sorby, S. & Panther, C. (2020). Is the key to better PISA math scores improving spatial skills? *Mathematics Education Research Journal*, 32 (2), 213–233. <https://doi.org/10.1007/s13394-020-00328-9>.

- 4 Lavi, R., Tal, M., & Dori, Y. (2021). Perceptions of STEM alumni and students on developing 21st century skills through methods of teaching and learning. *Studies in Educational Evaluation*, 70(101002). <https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2021.101002>.
- 5 (2018). PISA 2021. PISA 2021 Mathematics Framework (Draft). *oecd.org*. Retrieved from <https://www.oecd.org/pisa/sitedocument/PISA-2021-mathematics-framework.pdf>.
- 6 Haug, B., & Mork, S. (2021). Taking 21st century skills from vision to classroom: What teachers highlight as supportive professional development in the light of new demands from educational reforms. *Teaching and Teacher Education*, 100(103286). <https://doi.org/10.1016/j.tate.2021.103286>.
- 7 Saarela, M., & Karkkainen, T. (2017). Knowledge Discovery from the Programme for International Student Assessment. *Learning analytics: Fundamentals, Applications, and Trends: A view of the Current state of art to Enhance E-Learning*, 94 (229), 267. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-52977-68>.
- 8 Tatsuoaka, K.K. (1993). *Item construction and psychometric models appropriate for constructed response*. Princeton, N-J.
- 9 Nurgabyly, D., Kalzhanova, G., Ualiyev, N., & Abdoldinova, G. (2017). Construction of a Mathematical Model for Calibrating Test Task Parameters and the Knowledge Level Scale of University Students by Means of Testing. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13 (11), 7421–7429. <https://doi.org/10.12973/ejmste/79796>.

Д.Н. Нұрғабұл, Б.Б. Сәтқұлов, Ф.О. Мехмет

Оқушылардың жетістігін критериалды бағалау аясында математикалық сауаттылықты педагогикалық өлшеу

Отандық және шетелдік авторлардың зерттеу нәтижелерін талдау зерттеушілердің назары PISA халықаралық зерттеулерінің статистикасына көбірек аударылғанын және мектеп математика курсының оқыту процесінде оқушылардың математикалық сауаттылығын қалыптастыру мәселелері әлі де аз зерттелгенін қорытындылады, бұл зерттеудің мақсаты мен міндетін тандауға әкелді. Зерттеудің мақсаты мен міндеттері математикалық сауаттылықтың қалыптасуын өлшеу әдістемесін әзірлеуге бағытталған, ол оқушылардың жетістіктерін критериалды бағалау контекстінде, Экономикалық ынтымақтастық және даму ұйымының (OECD) бағдарламалық концепциясының негіз қалаушы мәселелерімен және PISA зерттеулерімен сәйкес келеді. Жұмыста оқушыларды математикалық сауаттылыққа үйрету, математикалық сауаттылықтың қалыптасуын өлшеу тәжірибеге бағытталған есептерді шешу арқылы жүзеге асырылатындығы негізделген. Мақалада мектеп оқушыларының проблемалық есептерді шешу барысында ойлау-пайымдау операциялары тізбектеле, біртіндеп орындалатыны анықталды, олар: пайымдау, проблемалық жағдайды түсіну, математикалық модель құрастыру, білімді қолдану, шешімді түсіндіру, зерттеу, бағалау. Проблемалық есептерді шешу процесінде орындалатын ойлау операциялардың реттілігі анықталды. Математикалық сауаттылықтың компоненттері анықталды және толықтырылды. Математикалық сауаттылықтың әрбір компоненті бойынша оқушылардың математикалық пайымдауын өлшеудің деңгейлік шкаласы белгіленді. Жеке есептер бойынша тақырыптық сауаттылықтың қалыптасу коэффициенттерін біріктіретін есептер блогы бойынша оқушының математикалық сауаттылығын өлшеуге арналған формула ұсынылған. Математикалық сауаттылықты қалыптастыру және дамыту процесінің моделі құрылды. Оқушылардың оқу жетістіктерін критериалды бағалау контекстінде математикалық сауаттылықтың қалыптасуын өлшеу әдістемесі әзірленді.

Кілт сөздер: математикалық сауаттылық, ойлау операциялары, бағалау тапсырмалары, оқу тапсырмалары, математикалық пайымдау, ХХІ ғасыр дағдылары, педагогикалық өлшем, критериалды бағалау.

D.N. Nurgabyly, B.B. Satkulov, F.O. Mehmet

Pedagogical measurement of mathematical literacy in the context of criterial assessment of students' achievements

Analysis of the research results of domestic and foreign authors allows us to conclude that the issues of teaching mathematical literacy in the process of teaching a school mathematics course still remain poorly studied, what determined the choice of goals and objectives of the study. The goal and objectives of this research are to develop a methodology for measuring the formation of mathematical literacy in the context of criterial assessment of students' achievements, which align with the fundamental issues of the program concept of the Organization for Economic Co-operation and Development (OECD) and the PISA studies. The work substantiates that the measurement of the development of mathematical literacy is carried out by solving practice-oriented problems. The work established that in the process of solving problem-based tasks, schoolchildren gradually perform the following mental operations: judgment, understanding, composing a problem, application, interpretation of a solution, evaluation. The components of mathematical literacy have been supplemented. A scale was established to measure schoolchildren's mathematical reasoning for each component of

mathematical literacy. A formula has been proposed for measuring a schoolchild's mathematical literacy based on a block of tasks that integrates the coefficients of mathematical literacy development for individual tasks. A methodology has been developed for measuring the development of mathematical literacy in the context of criteria-based assessment of students' educational achievements.

Keywords: mathematical literacy, mental operations, assessment tasks, learning tasks, mathematical reasoning, 21st century skills, pedagogical measurement, criterion-based assessment.

Information about the authors

Nurgabyly, D.N. — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Zhetysu University named after I. Zhansugurov, Taldykorgan, Kazakhstan, e-mail: *kebek.kz@mail.ru*;

Satkulov, B.B. — Doctoral Student, Zhetysu University named after I. Zhansugurov, Taldykorgan, Kazakhstan, e-mail: *bbs.mamyr@gmail.com*;

Mehmet, F.O. — PhD, Department of Mathematics and Science Education, Ağrı İbrahim Çeçen University, Ağrı, Turkey, e-mail: *fatihocal@gmail.com*.